Calcolo delle probabilità.

1. Impostazione classica

1.A La probabilità p(E) di un evento è il rapporto fra il numero m dei casi favorevoli (al verificarsi di E) ed il numero n dei casi possibili, giudicati egualmente possibili.

$$p(E)=\frac{m}{n}$$

- ❖ La probabilità è così un numero compreso fra zero e uno; zero rappresenta la probabilità dell'evento impossibile ed uno quella dell'evento certo.
- ❖ Esempio il lancio di due dadi ed ottenere due numeri uguali: totale dei casi 36 casi favorevoli 6; p=1/6

2. Impostazione frequentista

Frequenza di un evento relativa alle n prove effettuate, il rapporto fra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato ed il numero n delle prove effettuate:

$$f=\frac{k}{n} \qquad \text{quindi} \qquad 0\le f\le 1$$

Legge empirica del caso. In una serie di prove, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza tende ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento e, generalmente, l'approssimazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero delle prove eseguite.

2.A La probabilità di un evento è la frequenza relativa ad un numero di prove ritenuto sufficientemente elevato.

3. Impostazione soggettiva

3.A La probabilità p(E) di un evento E è la misura dl grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, in base alle sue informazioni, al verificarsi dell'evento E.

3.B La probabilità di un evento E, secondo l'opinione di un certo individuo, è il prezzo p che ritiene equo attribuire all'importo unitario esigibile al verificarsi di E.

- ❖ **Esempio:** attribuire probabilità 0,7 significa essere disposti a pagare 70 lire per riceverne 100 al verificarsi dell'evento.

4. Impostazione assiomatica

Ad ogni esperimento si può associare un insieme U - detto universo o spazio dei campioni o spazio degli eventi - i cui elementi sono tutti i possibili risultati dell'esperimento.

- La nozione di evento è assunta come primitiva
- Un evento è descrivibile con un'espressione linguistica alla quale si può associare un sottoinsieme dell'insieme universo U.
- Si può identificare l'evento con il sottoinsieme associato all'espressione linguistica che lo descrive e tradurre le operazioni logiche sugli eventi in operazioni fra sottoinsiemi.
- I sottoinsiemi costituiti da un solo elemento sono detti eventi elementari.

Si definiscono quindi

1° Evento contrario dell'evento A è l'evento $\overline{A}$ che si verifica se e solo se non si verifica A, cioè $\overline{A}$ è il complementare di A rispetto ad U.

2° Unione (o somma logica) di due eventi A e B, è l'evento A ∪ B che si verifica quando almeno uno degli eventi A, B si verifica

3° Intersezione (o prodotto logico) di due eventi A e B, è l'evento A ∩ B che si verifica se entrambi gli eventi A e B si verificano.

4° L'insieme degli eventi, nel caso che U sia un insieme finito, e l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di U, e quindi è l'insieme delle parti $\wp$(U).

4.A La probabilità p(E) è una funzione non negativa ed additiva fra l'insieme degli eventi e l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1, che soddisfa i seguenti assiomi:

1° $p(E) \geq 0$.
2° $p(U)=1$.
3° $p(E_1 \cup E_2)= p(E_1)+ p(E_2)$ se gli eventi sono incompatibili ($E_1 \cap E_2 = \varnothing$,la loro intersezione è vuota).

❖ Si deducono quindi le seguenti proprietà:

1° $p(\varnothing) \geq 0$. L'evento impossibile ha probabilità zero.
2° $0 \leq p(E) \leq 1$
3° $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$ La probabilità dell'evento contrario è uguale a uno meno la probabilità dell'evento.
4° Se gli eventi costituiscono una partizione dell'universo U (l'unione di questi è uguale ad U e la loro intersezione è vuota) si ha che la probabilità dell'unione di più eventi è uguale alla somma delle probabilità degli eventi. Inoltre se sono equiprobabili, si ha che l'evento E unione di m eventi elementari avrà probabilità uguale ad m/n.
5° Se $E_1 \subseteq E_2$ allora $p(E_1-E_2) = p(E_1) - p(E_2)$;
6° Se $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ e $E_1 \not\subset E_2$ allora $p(E_1-E_2) = p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

♦ Quindi la probabilità secondo l'impostazione classica è un caso particolare della probabilità secondo l'impostazione assiomatica di A. Kolmogoroff.

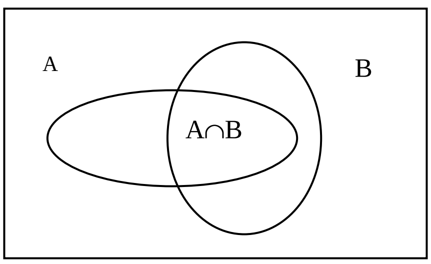
5.Probabilità totale di due o più eventi

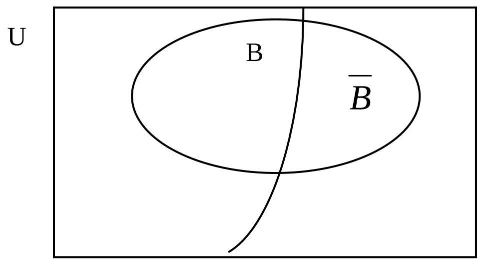
5.A La probabilità totale di due o più eventi è la probabilità della loro somma logica.

1° Se i due eventi non sono incompatibili:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)- p(A \cap B)$$

cioè: la probabilità della somma logica di due eventi è uguale alla somma della probabilità dei due eventi diminuita della probabilità dell'intersezione dei due eventi.





2° Tale proprietà si estende a tre o più insiemi
3° Se A e B sono due eventi qualunque si ha la seguente relazione:

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$

4° Si può estendere questa proprietà nel caso in cui:

♦ Gli insiemi B_i costituiscano una partizione di U
  ❖ $B_i \neq \varnothing$ per ogni i= 1, 2, … n
  ❖ $B_i \cap B_J = \varnothing$ per ogni $i \neq j$ con i, j= 1, 2, …n
  ❖ $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots\ldots \cup B_n = U$

♦ Si ha la relazione $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + \ldots + p(A \cap B_n)$

6. Probabilità condizionata

6.A Si definisce **probabilità condizionata (o subordinata)** all'evento B - e si indica con p(A/B) - la probabilità del verificarsi di a nell'ipotesi che B si sia verificato. Se B non si verifica, l'evento A/B non è definito.

6.B L'impostazione assiomatica definisce proprio come probabilità di A condizionata a B la relazione:

- $$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad se \qquad p(B) \neq 0$$

6.C Probabilità composta:

- $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = p(A) \cdot p(B/A)$
- se sono indipendenti p(A) = p(A/B) quindi $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A)$
- se p(A/B) > (<) p(A) e p(B/A) > (<) p(B) sono correlati positivamente (negativamente).

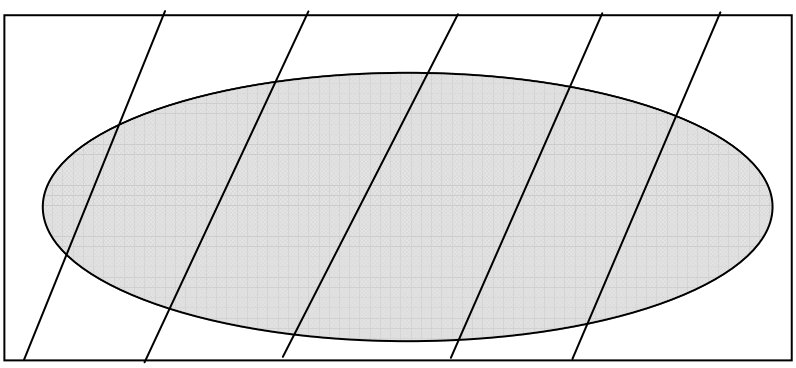
❖ Esempio: prove ripetute di Bernoulli

- Se su n prove k sono successi ed n-k sono insuccessi essendo le prove indipendenti si ha: $\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots\ldots\ldots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$ poiché i successi possono presentarsi in modi diversi (pari alle combinazioni di n oggetti k alla volta o alle permutazione di n oggetti di cui k ed n-k uguali fra loro) precisamente in $\binom{n}{k}$ modi la :
- $$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

7. teorema di Bayes o delle cause

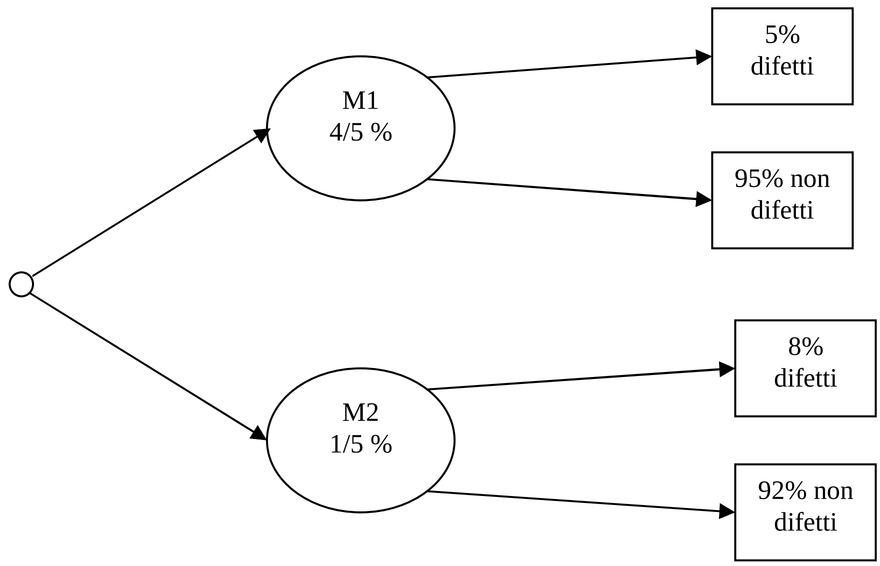
$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i)}$$

probabilità che si verifichi H_i sapendo che si è verificato A o probabilità che H_i sia la causa del verificarsi di A

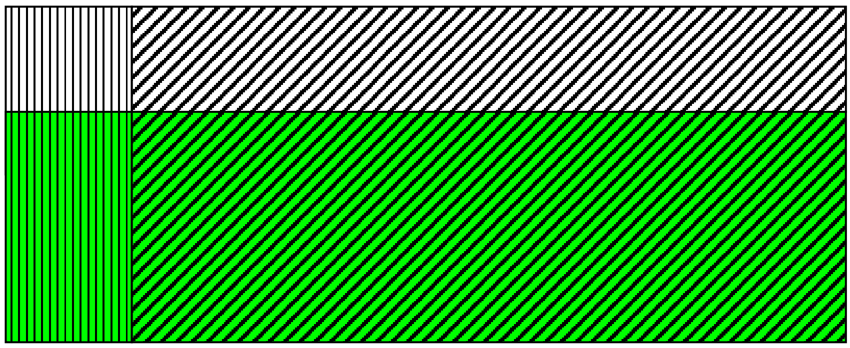


Il rettangolo rappresenta lo spazio campione, l’ovale l’evento A e le strisce le cause del verificarsi di A.

Consideriamo ad esempio: la ditta produce con due macchine dei bulloni; la prima ne produce 2000 al giorno, la seconda 500. la prima ha difetti sul 5% dei bulloni, la seconda sull’8% dei bulloni.
Il diagramma ad albero riproduce il nostro esempio:



Quindi nello spazio campione dei bulloni abbiamo le due macchine produttrici e le due possibili cause (difetto non difetto)



Il colore rappresenta la macchina 1 il bianco la macchina 2
Il rigato verticale i difettati il rigato trasverso i non difettati
Quindi se voglio sapere, estratto un difettato, se proviene dalla macchina 1 o 2 con bayes dovrei fare

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i)}$$

probabilità che sia della macchina 1 sapendo che è difettato = probabilità della macchina 1 per probabilità che sia un difettato della macchina 1 fratto la somma delle probabilità dei difettati di ogni macchina (prob macchina 1 per difettati macchina 1 + prob macchina 2 per difettati macchina 2 etc se ci fossero 10 macchine)
$p(H_1)=4/5$ $p(A/H_1)=5/100$ $p(H_2)=1/5$ $p(A/H_2)=8/100$

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{100}} = \frac{5}{7}$$